

Tentamen Complexe Analyse
16/04/07, 14.00–17.00 uur

1. Beschouw de functie $f(z) = \frac{z^2}{z+2}$.
 - (a) Toon aan dat $f(z)$ analytisch is in een omgeving van $z = 0$ door expliciet de convergente machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ te berekenen die in een omgeving van $z = 0$ gelijk is aan $f(z)$.
 - (b) Wat is de convergentiestraal van die machtreeks?
2. Beschouw de functie $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2(z-1)^2}$.
 - (a) Wat is de orde van de pool in $z = 1$?
 - (b) Bereken de eerste drie termen van de Laurent ontwikkeling van $f(z)$ in het punt $z = 1$.
 - (c) Heeft $f(z)$ een pool in het punt $z = \infty$? Zo ja, wat is zijn orde?

Aanwijzing: een functie $f(z)$ bezit een pool in $z = \infty$ van de orde α als de functie $f(1/z)$ een pool in $z = 0$ bezit van de orde α .

3. Bereken de integraal

$$\int_C \frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} dz,$$

waarbij C , de cirkel met middelpunt 0 en straal 2.5, in positieve zin doorlopen wordt.

4. Beschouw de functie $f(z) = \frac{z-2}{z^3}$.
 - (a) Formuleer het maximum-modulus principe voor een analytische functie.
 - (b) Bepaal met behulp van het maximum-modulus principe het maximum van $|f(z)|$ op $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 10\}$.
5. Bereken *met behulp van contourintegratie* de oneigenlijke integraal

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6} dx.$$

Geef aan welke argumenten hierbij gebruikt worden.